

条件概率

有一匹叫Harry的马，参加了100场赛马比赛，赢了20场，输了80场

明天Harry参加赛马的赢率是多大？

$$\text{Pr ob}(\text{赢}) = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\text{Pr ob}(\text{输}) = \frac{80}{100} = 0.8$$

条件概率

有一匹叫Harry的马，参加了100场赛马比赛，赢了20场，输了80场

在这100场比赛中，有30场是下雨天，70场是晴天。
在30场下雨天的比赛中，Harry赢了15场。

如果明天下雨，Harry参加赛马的赢率是多大？

$$\text{Prob}(\text{赢} | \text{下雨}) = \frac{15}{30} = 0.5$$

$\text{Prob}(\text{赢} | \text{下雨})$ 指“在下雨的条件下，赢的概率”

条件概率

设一个试验有N个结果。其中事件A，B分别包含 M_1 和 M_2 个结果，其中有 M_{12} 个结果是A，B公共的。那么，已知B事件发生的情况下A事件的概率，就是A事件以B为条件的条件概率，记作 $P(A|B)$

$$\text{Pr ob}(A | B) = \frac{M_{12}}{M_2} = \frac{\frac{M_{12}}{N}}{\frac{M_2}{N}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\text{Pr ob}(\text{赢} | \text{下雨}) = \frac{\text{Pr ob}(\text{赢} \& \text{下雨})}{\text{Pr ob}(\text{下雨})} = \frac{15/100}{30/100} = 0.5$$

$$\text{Pr ob}(\text{下雨} | \text{赢}) = \frac{\text{Pr ob}(\text{下雨} \& \text{赢})}{\text{Pr ob}(\text{赢})} = \frac{15/100}{20/100} = 0.75$$

条件概率

$$(1) \quad P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$(2) \quad P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

由 (1) 式可得 $P(AB) = P(A|B) P(B)$ (3)

由 (2) 式可得 $P(BA) = P(B|A) P(A)$ (4)

$$P(AB) = P(BA) \quad (5)$$

$$P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A) \quad (6) : \text{将(3) (4) 代入 (5)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Bayes' rule (贝叶斯公式)

条件概率

$$\begin{aligned} \text{Pr ob}(\text{下雨} | \text{赢}) &= \frac{\text{Prob}(\text{赢} | \text{下雨}) * \text{Pr ob}(\text{下雨})}{\text{Pr ob}(\text{赢})} \\ &= \frac{0.5 * 0.3}{0.2} \\ &= 0.75 \end{aligned}$$