条件概率

有一匹叫Harry的马，参加了100场赛马比赛，赢了20场，输了80场。

明天Harry参加赛马的赢率是多大？

$$\Pr ob(赢) = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\Pr ob(输) = \frac{80}{100} = 0.8$$

条件概率

有一匹叫Harry的马，参加了100场赛马比赛，赢了20场，输了80场。

在这100场比赛中，有30场是下雨天，70场是晴天。在30场下雨天的比赛中，Harry赢了15场。

如果明天下雨，Harry参加赛马的赢率是多大?

$$\mathrm{Pr}\,ob(\text{赢}\mid\text{下雨}) = \frac{15}{30} = 0.5$$

Prob(赢|下雨) 指“在下雨的条件下，赢的概率”

条件概率

设一个试验有N个结果。其中事件A，B分别包含M_1和M_2个结果，其中有M_{12}个结果是A，B公共的。那么，已知B事件发生的情况下A事件的概率，就是A事件以B为条件的条件概率，记作P(A|B)

$$\Pr ob(A|B)=\frac{M_{12}}{M_2}=\frac{\frac{M_{12}}{N}}{\frac{M_2}{N}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\Pr ob(赢|下雨)=\frac{\Pr ob(赢\&下雨)}{\Pr ob(下雨)}=\frac{15/100}{30/100}=0.5$$

条件概率

（1） $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ （2） $P(B|A)=\dfrac{P(BA)}{P(A)}$

由（1）式可得 P(AB) = P(A|B) P(B) (3)

由（2）式可得 P(BA) = P(B|A) P(A) (4)

P(AB) = P(BA) (5)

P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A) (6)

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Bayes' rule （贝叶斯公式）

贝叶斯概率

由“果”推“因”

$$\mathrm{Pr}\,ob(\text{下雨}\,|\,\text{赢}) = \frac{\mathrm{Prob}（\text{赢}\,|\,\text{下雨}) * \mathrm{Pr}\,ob(\text{下雨})}{\mathrm{Pr}\,ob(\text{赢})}$$

$$= \frac{0.5 * 0.3}{0.2}$$

$$= 0.75$$

有一匹叫Harry的赛马，在甲地参加比赛，雨天的胜率是50%，晴天的胜率是7.14%。假设甲地天气只有雨天和晴天两种情况，一年中雨天的概率是30%。10月8日这天Harry赢了。请问当天的天气是雨天的概率是多少？

$$\mathrm{Pr}\,ob(\text{下雨}\,|\,\text{赢}) = \frac{\mathrm{Prob}\,(\text{赢}\,|\,\text{下雨}) * \mathrm{Pr}\,ob(\text{下雨})}{\mathrm{Pr}\,ob(\text{赢})}$$

$$\mathrm{Prob}(\text{下雨}|\text{赢}) = \frac{Prob(\text{赢}|\text{下雨}) * Prob(\text{下雨})}{Prob(\text{赢}\&\text{下雨}) + Prob(\text{赢}\&\text{晴天})}$$

$$\mathrm{Prob}(\text{下雨}|\text{赢}) = \frac{Prob(\text{赢}|\text{下雨}) * Prob(\text{下雨})}{Prob(\text{赢}|\text{下雨}) * Prob(\text{下雨}) + Prob(\text{赢}|\text{晴天}) * Prob(\text{晴天})}$$

$$\mathrm{Prob}(\text{下雨}|\text{赢}) = \frac{0.5 * 0.3}{0.5 * 0.3 + 0.0714 * 0.7} = \frac{0.15}{0.15+0.05} = \frac{0.15}{0.20} \mathbf{= 0.75}$$

K病在S城人群中的患病率是 1/1000。H医院检测该病的统计数据显示：

（1）患病时，检测呈阳性的概率是 99%；

（2）没患病时，检测误报阳性的概率是 1% 。

阿Q周一做了K病检测，结果阳性，他患K病的概率是多少？

P(有病) = 0.10%　　　　P(无病) = 99.90%

P(阳性|有病) = 99.00%　　　　P(阳性|无病) = 1.00%

P(有病|阳性) = ?

$$P(\text{有病}|\text{阳性}) = \frac{P(\text{阳性}|\text{有病}) * P(\text{有病})}{P(\text{阳性})} = \frac{0.99*0.001}{0.01098} \approx \mathbf{0.0902}$$

$$\begin{aligned} P(\text{阳性}) &= P(\text{阳性}|\text{有病})*P(\text{有病}) + P(\text{阳性}|\text{无病})*P(\text{无病}) \\ &= 0.99*0.001 + 0.01*0.999 \\ &= 0.00099 + 0.00999 \\ &= 0.01098 \end{aligned}$$

贝叶斯思想干的就是一件事：

有了新证据（条件）之后，我该怎样改变原先的信念？

P(赢) = 0.2 → P(赢|下雨) = 0.5 （1）

P(下雨) = 0.3 → P(下雨|赢) = 0.75 （2）

先验概率(prior) 后验概率(posterior)

（1）有了关于“下雨”的新证据后，更新对“赢”的信念

（2）有了关于“赢”的新证据后，更新对“下雨”的信念

$$\frac{P(\text{Harry赢}|\text{下雨})}{P(\text{Harry赢})} = \frac{P(\text{下雨}|\text{赢})}{P(\text{下雨})} = 2.5$$